

文章编号: 1000-7598 (2011) 02-0579-07

样本数与边坡模糊随机可靠指标关系研究

谭晓慧^{1,2}, 毕卫华¹, 胡晓军³, 吴坤铭⁴

(1.合肥工业大学 资源与环境工程学院, 合肥 230009; 2.合肥工业大学 地质学博士后科研流动站, 合肥 230009;
3.合肥学院 建筑工程系, 合肥 230009; 4.合肥工业大学 土木与水利工程学院, 合肥 230009)

摘 要:以模糊随机变量理论为指导, 视模糊随机变量的均值为模糊数, 基于小样本理论推导了均值模糊数模糊变化范围与样本数的关系式。采用截集敏感性分析法进行了边坡稳定的模糊随机有限元可靠度分析, 得到了边坡的模糊随机可靠指标及模糊滑面的位置, 研究了样本数与边坡模糊随机可靠指标的关系。分析表明, 基于模糊随机变量理论的模糊随机可靠度分析方法是随机可靠度分析方法的自然推广; 模糊随机可靠指标与样本数有关, 随着样本数的改变, 模糊随机可靠指标的中值也会发生微小变化, 不是定值; 在相同的置信度情况下, 模糊随机可靠指标的变化范围随着样本数的增加而减小, 可通过增加样本数的方式来减小模糊随机可靠指标的模糊性。

关 键 词:模糊性; 随机性; 可靠度分析; 样本数; 边坡稳定

中图分类号: TU 31

文献标识码: A

Study of relationship between sample size and fuzzy random reliability indices of slope stability

TAN Xiao-hui^{1,2}, BI Wei-hua¹, HU Xiao-jun³, WU Kun-ming⁴

(1. School of Resources and Environment Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. Center for post-doctoral studies of Geology; Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 3. School of Architecture Engineering, Hefei University, Hefei 230009, China;
4. School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: Considering the means of fuzzy random variables are fuzzy numbers, the relationship between the variation ranges of the means of fuzzy random variables and sample size is obtained based on the theory of fuzzy random variables and the theory of small sample size. Through the fuzzy random finite element reliability analysis of slope stability using the cutting method of sensitivity, the fuzzy random reliability indices and the fuzzy slip surfaces of slopes can be calculated; and the relationship between sample size and fuzzy random reliability indices can be obtained. It is demonstrated that the method of fuzzy random reliability analysis based on the theory of fuzzy random variables are the natural extension of the normally used method of stochastic reliability analysis. The normal value of fuzzy reliability indices is not a constant for it will change a little with the changing of sample size. Under the same confidence level, the variation ranges of the reliability indices will decrease with the increasing of sample size. Then, we can decrease the fuzziness of fuzzy random reliability indices by increasing the number of sample size.

Key words: fuzziness; randomness; reliability analysis; sample size; slope stability

1 引 言

结构可靠度分析源于工程结构的材料参数、几何参数和结构所受外力等不确定性对结构性能的影响。这些不确定性在结构的安全性和耐久性评定中具有非常重要的作用, 不能简单地予以忽略。按可靠度分析中是否引入概率的概念可将其分为两大类: 非概率体系下的方法和概率体系下的方法。非概率体系下结构可靠度分析方法包括凸集法和区间

分析法^[1-2], 它们不需要考虑参数的概率分布型式或隶属函数型式, 是概率方法的补充。概率体系下结构可靠度分析方法包括随机方法、模糊方法及模糊随机方法, 它们可分别研究随机性、模糊性及模糊随机性。

随机性是因果关系不充分而形成的一种不确定性, 属于客观不确定性; 模糊性是事物的差异在中介过渡中呈现的亦此亦彼性, 属于主观不确定性。随机性和模糊性是两种不同的不确定性, 同时存在

收稿日期: 2009-06-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 50748033, No. 40972194); 合肥工业大学博士专项基金项目 (No. 2007GDBJ044)。

第一作者简介: 谭晓慧, 女, 1971 年生, 博士, 教授, 主要从事岩土力学的教学与研究工作。E-mail: tantan9666@126.com

于同一工程, 因此, 进行模糊随机可靠度分析是十分必要的。

当前的模糊随机可靠度分析方法主要有两大类: (1) 假设基本变量是模糊的^[3-4], 或部分基本变量是模糊的、部分基本变量是随机的^[5-8]。这类问题的主要求解方法是先根据截集水平法或等价变换法将模糊变量转为随机变量, 再采用模糊概率法来进行求解。(2) 基于模糊随机变量理论, 假设基本变量是模糊随机变量^[9-11]。基于模糊随机变量理论的模糊随机可靠度分析能同时考虑变量的模糊性与随机性。

模糊随机可靠度分析的结果与基本变量的取值有关, 研究参数的取值方法是十分重要的。Feng 等^[12]认为, 模糊随机变量的均值是模糊数而其均方差是定值; Moller 等^[10]认为, 模糊随机变量的均值及均方差都是区间量; 李胡生等^[4]认为, 模糊随机变量的均值及均方差均为定值; 曹文贵等^[13]、蒋中明等^[14]直接视参数为非对称三角模糊数。

综上所述, 多位学者从不同角度研究了模糊随机可靠度分析方法及参数的取值方法。由于参数模糊性与样本数有关, 本文基于模糊随机变量理论及小样本理论, 研究样本数与模糊随机可靠指标的关系, 并将其应用于边坡稳定的有限元可靠度分析。

2 模糊随机变量理论概述

模糊随机变量有多种定义方法, 其详细定义及描述可参见文献[10, 15], 此处只简述其基本概念。设 $\underline{X}$ 为随机变量, Ω 为随机基本事件空间, 记每个基本事件的一次实现为 ω , 则 $\omega \in \Omega$ 。若这些实现没有模糊性, 则 $\underline{x}(\omega) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \subseteq \underline{X}$ 形成纯随机变量 $\underline{X}$ (n 为变量个数)。若这些实现具有模糊性, 则 $\tilde{x}(\omega) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \subseteq \tilde{X}$ 形成模糊随机变量 $\tilde{X}$ 。例如, 图 1 为一维模糊随机变量的几次实现^[15]。概括地说, 模糊随机变量 $\tilde{X}$ 是不确定映射 $\tilde{X}: \Omega \rightarrow F(R^n)$ 的模糊结果, 其中 $F(R^n)$ 是 n 维 Euclidian 空间 R^n 中所有模糊数的集合。

与普通随机变量相对应, 模糊随机变量也可用累积分布函数、概率密度函数来表示其分布情况, 并用均值和均方差等数字特征来描述这些函数。由于模糊随机变量同时反映了变量的随机性与模糊性, 因此, 模糊随机变量的均值和均方差都是模糊数。因可靠指标对均值的敏感性远远大于可靠指标对均方差的敏感性^[16], 故本文在进行模糊随机可靠度分析时, 取模糊随机变量的均值为模糊数, 而取其均方差为定值。例如, 设土的黏聚力 c 为正态分

布的模糊随机变量, 其均值 $\tilde{m}_c$ 为对称三角模糊数, 均方差 σ_c 为定值, 则均值 $\tilde{m}_c$ 的隶属函数可用图 2 表示, 变量 c 的累积分布函数 (CDF) 及概率密度函数 (PDF) 可用图 3 表示。图 3 中, 实线和虚线分别对应于隶属度为 1 及 0 的情况, 隶属度在 1.0 和 0 之间的曲线位于实线和虚线之间。由于曲线的参数是模糊数, 因此, CDF 及 PDF 曲线是由众多曲线组成的曲线簇而不是一条曲线。特别地, 当曲线的参数由模糊数退化为定值时, 模糊随机变量就退化为常规的随机变量。

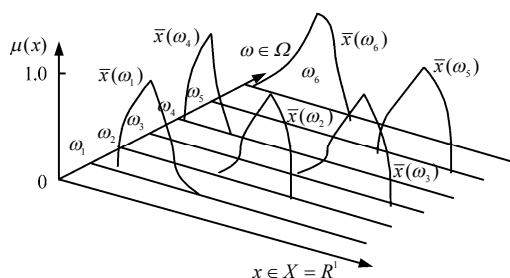


图 1 一维模糊随机变量的实现

Fig.1 Realizations of a one-dimensional fuzzy random variable

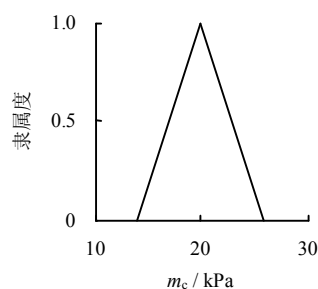


图 2 三角型模糊数的隶属函数

Fig.2 Membership function of triangular fuzzy number

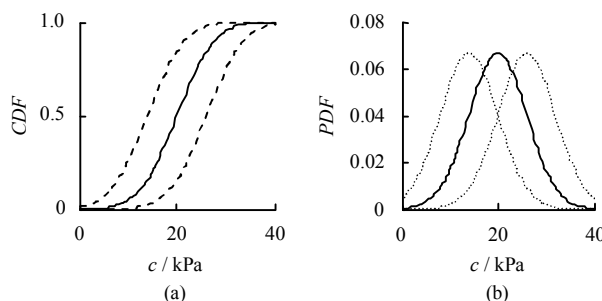


图 3 模糊累积分布函数及模糊概率密度函数

Fig.3 Fuzzy cumulative distribution function and fuzzy probability density function

3 模糊随机变量均值模糊性与样本数的关系

不失一般性, 设模糊随机变量的均值为对称三

角模糊数, 并记为 $\tilde{m}_X = [x_L, x_N, x_R]$, 其中 x_N 、 x_L 、 x_R 分别为模糊数的中值及其左右端点值。对于对称三角模糊数, 常取中值为样本均值, 并取 x_L 、 x_R 与中值 x_N 的距离为均方差 σ_X 的倍数 (σ_X 的值由样本均方差确定), 即

$$x_R - x_N = x_N - x_L = f\sigma_X \quad (1)$$

式中: f 为表示模糊随机变量均值模糊性的模糊程度系数。对于某一具体工程, 样本均值及样本均方差可由试验数据求得, 因此, 确定系数 f 的大小就成为模糊随机可靠度分析的关键问题之一。当前常用的方法是假定 $f = 1 \sim 3$ ^[17]。本文根据概率论与数理统计中的小样本理论来求解 f 值的大小。

由概率论与数理统计可知^[18], 正态总体 X_i 均值的双侧 $100(1-\alpha)\%$ 置信区间为

$$\bar{x}_i \pm t_{\alpha/2}(N-1)s_i/\sqrt{N} \quad (2)$$

式中: N 为试验数量 (子样本容量); $t_{\alpha/2}(N-1)$ 为自由度为 $N-1$ 的 t 分布的双侧 $100\alpha\%$ 百分位点; $\bar{x}_i$ 和 s_i 分别为变量 X_i 的样本均值及样本均方差, 其计算公式为

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^N x_{ij}}{N}; \quad s_i = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (x_{ij} - \bar{x}_i)^2} \quad (3)$$

式中: x_{ij} 为第 i 个基本变量的第 j 个样本值, $i=1, \dots, n$; $j=1, \dots, N$ 。

由式 (2) 可知, 总体均值在样本均值两侧波动, 其最大波动范围是 $|t_{\alpha/2}(N-1)s_i/\sqrt{N}|$ 。因此,

当以样本均值及样本均方差分别表示模糊随机变量均值模糊数的中值及模糊随机变量的均方差时, 可由式 (1)、(2) 得到模糊程度系数的最大值为

$$f_{\max} = t_{\alpha/2}(N-1)/\sqrt{N} \quad (4)$$

由式 (4) 可求得给定置信度时模糊程度系数 $f_{\max}$ 与样本数 N 的关系。图 4 为不同置信度时 $f_{\max}$ 与 N 的关系曲线, 它表明随着样本数的增加, 系数 $f_{\max}$ 值减小, 因而参数均值的模糊程度也有所减小。特别地, 由此图可见, 当 $N \leq 6$ 时, $f_{\max}$ 较大; 而当 $N > 6$ 时, $f_{\max}$ 明显减小。因此, 在统计土体的抗剪强度指标时, 一般规定样本数 $N \geq 6$ ^[19]。

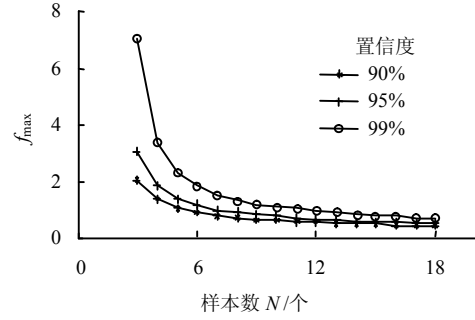


图 4 系数 $f_{\max}$ 与样本数 N 的关系
Fig.4 Relationships between coefficient $f_{\max}$ and number of samples size N

4 边坡模糊随机有限元可靠度分析

4.1 边坡的随机有限元可靠度分析

由于有限元法能反映边坡工程复杂的应力-应变关系及边界条件, 本文采用有限元法来进行边坡的模糊随机可靠度分析。设土体为满足 Mohr-Coulomb 屈服准则的弹性-理想塑性材料, 则对于任一滑面, 其极限状态函数可取为

$$Z = g(X) = \sum_{i=1}^{n_e} Z_i \Delta l_i \quad (5)$$

其中

$$Z_i = g_i(X) = - \left(\frac{\sigma_{xi} + \sigma_{yi}}{2} - \frac{\sigma_{xi} - \sigma_{yi}}{2} \cos(2\theta_i) + \tau_{xyi} \sin(2\theta_i) \right) \cdot \tan \varphi_i + c_i - \left(\frac{\sigma_{xi} - \sigma_{yi}}{2} \sin(2\theta_i) + \tau_{xyi} \cos(2\theta_i) \right) \quad (6)$$

式中: $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为基本变量; Z_i 、 Δl_i 分别为第 i 单元的极限状态函数值及滑弧长度; σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 、 θ 分别为应力分量和滑面与水平面的夹角; n_e 为滑弧上的有限单元个数。

确定了极限状态函数之后, 可由 1 阶可靠度分析方法求解单元可靠指标及边坡整体可靠指标, 其迭代计算公式为

$$\left. \begin{aligned} \alpha_X &= - \frac{\rho_X \sigma_X \nabla g(x^*)}{[\nabla g(x^*)^T C_X \nabla g(x^*)]^{1/2}} \\ \beta &= \frac{g(x^*) - \nabla g(x^*)^T (x^* - \mu_X)}{[\nabla g(x^*)^T C_X \nabla g(x^*)]^{1/2}} \\ x^* &= \mu_X + \sigma_X \alpha_X \beta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

在迭代求解可靠指标的同时, 还可由式 (8) 求出可靠指标对参数均值的敏感性:

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_X} = \frac{\nabla g(x^*)}{[\nabla g(x^*)^T C_X \nabla g(x^*)]^{1/2}} \quad (8)$$

式中: β 为可靠指标; μ_X 及 α_X 分别为基本变量 X 的均值向量及方向余弦向量; x^* 为验算点坐标; $g(x^*)$ 、 $\nabla g(x^*)$ 分别为点 x^* 处极限状态函数值及其对基本变量的梯度向量; σ_X 、 ρ_X 、 C_X 分别为基本变量均方差矩阵、相关系数矩阵及协方差矩阵。

4.2 边坡的模糊随机有限元可靠度分析

模糊随机变量是随机变量在参数具有模糊性时的推广。因此, 模糊随机可靠度分析也应是随机可靠度分析的推广。根据这一思路, 本文采用基于模糊随机变量理论的截集敏感性分析法来求解边坡的模糊随机可靠指标^[20]。其主要步骤是: ①在参数中值处进行随机有限元敏感性分析, 按式(8)判断各基本变量是抗力项还是荷载项; ②对模糊数取若干个截集水平, 分别在不同截集水平上根据敏感性分析结果取基本变量的 2 组极端组合, 并由这 2 组数据求出该截集水平上可靠指标的极值。综合分析多个截集水平上可靠指标极值的求解结果, 即可得出可靠指标的模糊分布。

由上述步骤可知, 基于模糊随机变量理论进行模糊随机可靠度分析的优点是它可将随机可靠度分析程序作为一个整体来调用, 即随机可靠度分析程序可不加修改地被模糊随机可靠度分析程序调用。若截集水平有 k 个 (其中有一个截集水平对应的隶属度为 1.0), 则模糊随机可靠度分析中共需调用 $2k-1$ 次随机可靠度分析程序。当参数不具有模糊性时, $k=1$, 基于模糊随机变量理论的模糊随机可靠度分析即退化为常规的随机可靠度分析。

5 算例分析

屯黄公路皮园村某边坡由 2 层土组成 (图 5), 上层为坡面松散堆积物, 下层为硅质岩块石层。敏感性试算分析表明, 该边坡的安全系数及可靠指标只与上层土的强度参数有关, 因此, 只取上层土的黏聚力 c_1 及内摩擦角 φ_1 为模糊随机变量。它们满足模糊正态分布, 均方差分别为 6 kPa 及 9° ; 均值为三角模糊数, 模糊数的中值分别为 $c_{1N}=20$ kPa, $\varphi_{1N}=30^\circ$, 其余参数视为定值, 黏聚力 $c_2=200$ kPa, 内摩擦角 $\varphi_2=32^\circ$, 重度 $\gamma_1=21.4$ kN/m³, $\gamma_2=23.7$ kN/m³, 弹性模量 $E_1=30$ MPa, $E_2=1.7\times 10^3$ MPa, 泊松比 $\mu_1=\mu_2=0.3$ (下标 1、2 分别代表上、下层)。

有限元计算采用 8 节点四边形单元, 网络剖分按照由疏到密的方式试算, 直至计算结果与网格密度无关时为止, 最终选定的网络剖分结果如图 5 所示。为了对比起见, 在进行模糊随机有限元可靠度分析的同时, 亦进行了定值法分析以求得该边坡的

安全系数。定值法求安全系数 F_s 的方法是基于滑面应力分析的有限元法^[21], 其计算公式如下:

$$F_s = \frac{\sum \tau_{fi} \Delta l_i}{\sum \tau_i \Delta l_i} \quad (9)$$

式中: τ_{fi} 、 τ_i 分别为滑面上第 i 单元的抗剪强度和剪应力; Δl_i 为滑面在第 i 单元的弧长。

定值法计算表明, 边坡的安全系数 $F_s=1.22$, 其临界滑面 (最小安全系数 F_{smin} 面) 位置参如图 6 所示。因此, 从定值法的角度来分析该边坡是稳定的, 但实际上该边坡发生了滑动破坏, 因此, 再对该边坡进行可靠度分析。

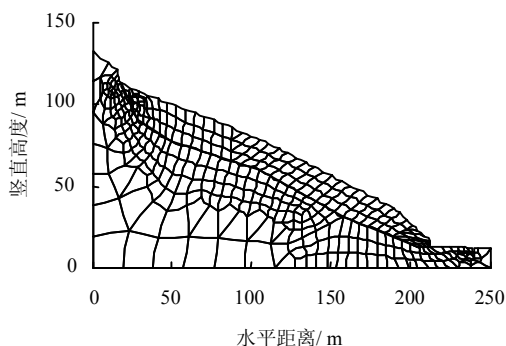


图 5 边坡外形及网格剖分图

Fig.5 Slope section and FEM mesh

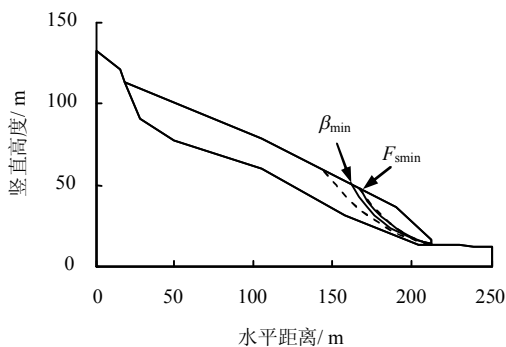


图 6 滑面位置图 (N=6 个)

Fig.6 Positions of slip surfaces (N=6)

5.1 样本均值及其变化范围的确定

按前述分析, 模糊随机变量均值模糊数的模糊程度系数的最大值 f_{max} 由式(4)确定, 均值模糊数的中值由样本均值确定。由式(3)第 1 式可知, 中值与样本数 N 有关。为研究样本数与边坡模糊随机可靠指标的关系, 应分别对各种不同数量的试验样本值进行统计, 得到某一特定样本数时的样本均值及其变化范围, 并根据此参数进行边坡的模糊随机可靠度分析。由于该工程没有提供详细的样本试验数据, 参考文献[22], 本文基于蒙特卡罗模拟法来

构造试验样本值。具体方法是：设参数的均值及均方差已知，则可由蒙特卡罗随机抽样法来产生已知分布类型的若干个样本值。例如，对于变量 c_1 ，设其均值 $\mu_{c_1} = 20$ kPa，均方差 $\sigma_{c_1} = 6$ kPa，则由蒙特卡罗模拟法所得试验样本值的一次实现，见表 1。

表 1 正态分布 $N(20,6)$ 的样本值
Table 1 Sample values of normal distribution $N(20,6)$

样本编号	样本值 / kPa	样本编号	样本值 / kPa
1	24.3	10	18.9
2	29.6	11	18.2
3	7.6	12	25.7
4	15.5	13	16.8
5	21.1	14	14.6
6	23.2	15	14.6
7	16.7	16	21.7
8	21.8	17	15.5
9	12.6	18	29.6

为研究样本数与样本均值的关系，分别取表 1 中前 N ($N = 3 \sim 18$) 个样本值进行数理统计，以得到不同样本数时的变量均值，并由式 (2) 求解变量均值的变化范围。图 7 表示置信度为 90% 时黏聚力 c_1 的均值及其变化范围与样本数的关系，图中短横线表示与某样本数对应的样本均值，竖线表示均值的变化范围，可见随着样本数的增加，样本均值也在真值附近有微小波动，不是一个常数；均值的模糊变化范围随着样本数的增加而有所减小。若样本数太少，则均值的模糊变化范围非常大，难以实用。

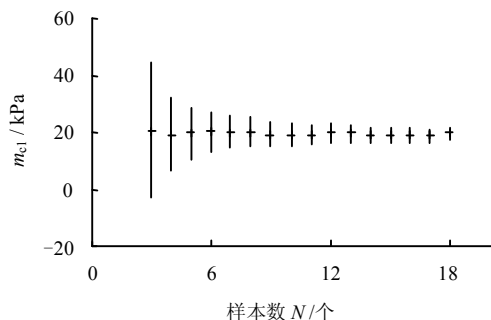


图 7 参数 c_1 的均值变化范围与样本数 N 的关系
Fig.7 Relationships between the variation range of the mean of c_1 and number of samples N

5.2 样本数与模糊随机可靠指标的关系

为讨论样本数对边坡模糊随机可靠指标的影响，分别以样本数 $N = 4 \sim 7$ 为例，采用本文第 4 章节的方法来计算边坡的模糊随机可靠指标。为对比起见，本文分 2 种情况计算了边坡的模糊随机可靠

指标：①以定值法临界滑面为研究对象，计算该特定滑面上的模糊随机可靠指标；②以整个边坡为研究对象，搜索可靠度分析的临界滑面（最小可靠指标 $\beta_{\min}$ 面）及其对应的模糊随机可靠指标，部分计算结果如图 6、8 所示。

图 8 中，实线和虚线分别表示最小可靠指标面和最小安全系数面的计算结果。由该图可知，(1) 随着样本数的增加，模糊随机可靠指标的中值有一定波动，但波动幅度较小；(2) 模糊随机可靠指标的变化范围随着样本数的增加逐渐减小，即样本数越多，可靠指标的模糊性越小。这是因为样本数越多，人们对参数的特征信息了解得越全面，因而模糊程度就越小；(3) 最小可靠指标面的可靠指标小于或等于最小安全系数面的可靠指标，即边坡的最小安全系数面并不是最小可靠指标面。在进行可靠度分析时，应以最小可靠指标面作为边坡的临界滑面。由图 8 可知，在各种情况下该边坡的可靠指标都较小，最大的可靠指标为仅 1.7，因此，该边坡是不稳定性边坡^[23]。计算结果与实际情况相符。

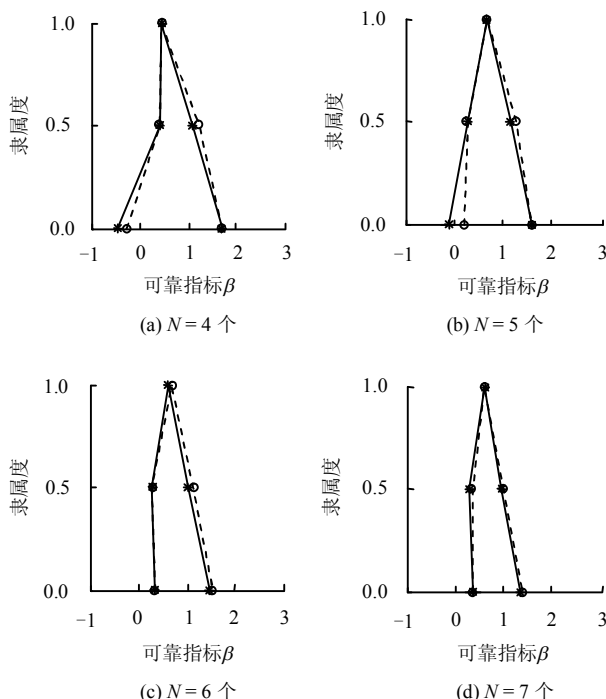


图 8 模糊随机可靠指标与样本数的关系
Fig.8 Relationships between fuzzy random reliability index and sample size

在模糊随机可靠指标发生变化的同时，其对应的滑面位置也相应发生变化，图 6 显示的是样本数 $N = 6$ (个) 时的模糊滑面位置，图中 2 条实线分别表示 $F_{s\min}$ 面及均值模糊数取中值时对应的 $\beta_{\min}$ 面，2 条虚线分别表示均值模糊数在其最大变化范

围内变化时 $\beta_{\min}$ 面位置的变化范围 (其中上面 1 条虚线与 $F_{s\min}$ 面几乎重合), 可见 $F_{s\min}$ 面与 $\beta_{\min}$ 面的位置有一定区别; 均值模糊数变化时滑面位置也在一定范围内有所变化, 形成了模糊滑带。

图 6、8 是在参数的置信度为 90% 时的计算结果。由图 4 可知, 在相同的样本数情况下, 随着置信度的提高, $f_{\max}$ 值也有所提高, 即均值模糊数的变化范围也有所增加。因此, 在相同的样本数情况下, 随着置信度的提高, 模糊随机可靠指标的变化范围也相应增加。为了减小模糊随机可靠指标的变化范围, 应增加样本数, 这有助于掌握更多的样本信息, 减小参数统计中的模糊性, 提高可靠度分析的精确性。

6 结 语

随机变量是模糊随机变量的特例, 模糊随机变量是随机变量的推广。相应地, 基于模糊随机变量理论的模糊随机可靠度分析方法也是随机可靠度分析方法的推广, 后者可以不加改动地被前者多次调用。本文基于模糊随机变量理论及小样本理论, 研究了样本数与模糊随机可靠指标的关系, 并将其应用于边坡稳定的模糊随机有限元可靠度分析, 求解了边坡的模糊随机可靠指标及临界滑面位置。分析表明, 可靠指标的模糊程度可由基本变量均值的模糊程度来反映, 而基本变量均值的模糊程度又与参与试验的样本数有关。在同一置信度情况下, 随着样本数的改变, 模糊随机可靠指标的中值会在其真值附近有微小波动, 不是一个定值; 模糊随机可靠指标的变化范围随着样本数的增加而逐渐减小。为了减小模糊随机可靠指标的变化范围, 提高可靠度分析的精确性, 应适当增加试验样本数。

参 考 文 献

- [1] 郭书祥, 吕震宙, 张陵. 基于能度可靠性的结构优化设计方法[J]. 计算力学学报, 2004, 21(1): 21—25.
GUO Shu-xiang, LÜ Zheng-zhou, ZHANG Ling. Optimization of uncertain structures based on possibilistic reliability model[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2004, 21(1): 21—25.
- [2] 苏永华, 何满潮, 赵明华, 等. 基于区间变量的响应面可靠性分析方法[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(12): 1408—1413.
SU Yong-hua, HE Man-chao, ZHAO Ming-hua, et al. Reliability analysis of response surface method based on interval variables[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2005, 27(12): 1408—1413.
- [3] 王亚军, 张我华, 金伟良. 一次逼近随机有限元对堤坝模糊失效概率的分析[J]. 浙江大学学报(工学版), 2007, 41(1): 52—56.
WANG Ya-jun, ZHANG Wo-hua, JIN Wei-liang. Stochastic finite element analysis for fuzzy probability of embankment system failure by first-order approximation theorem[J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2007, 41(1): 52—56.
- [4] 李胡生, 叶黔元. 陡峭岩石边坡随机一模糊可靠度算法[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(8): 1019—1022.
LI Hu-sheng, YE Qian-yuan. Calculation of random-fuzzy reliability of steep slopes[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2006, 28(8): 1019—1022.
- [5] 董玉革, 陈心昭, 赵显德, 等. 基于模糊事件概率理论的模糊可靠性分析通用方法[J]. 计算力学学报, 2005, 27(3): 281—286.
DONG Yu-ge, CHEN Xin-zhao, ZHAO Xian-de, et al. A general approach for fuzzy reliability analysis based on the fuzzy reliability theory[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005, 27(3): 281—286.
- [6] JIANG Q, CHEN C H. A numerical algorithm of fuzzy reliability[J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2003, 80: 299—307.
- [7] 吕震宙, 岳珠峰. 模糊随机可靠性分析的统一模型[J]. 力学学报, 2004, 36(5): 533—539.
LÜ Zhen-zhou, YUE Zhu-feng. Unified model of fuzzy random reliability analysis[J]. *ACTA Mechanica Sinica*, 2004, 36(5): 533—539.
- [8] ADDURI P R, PENMETSA R C. Confidence bounds on component reliability in the presence of mixed uncertain variables[J]. *International Journal of Mechanical Science*, 2008: 481—489.
- [9] 刘玉彬, 王光远. 基于模糊随机变量的结构广义可靠度[J]. 哈尔滨建筑大学学报, 1995, 28(3): 1—6.
LIU Yu-bin, WANG Guang-yuan. Fuzzy random reliability of structures based on the model of stress fuzzy stochastic process[J]. *Journal of Harbin University of Architecture and Engineering*, 1995, 28(3): 1—6.
- [10] MOLLER B, GRAF W G, BEER M. Safety assessment of structures in view of fuzzy randomness[J]. *Computers and Structures*, 2003, 81: 1567—1582.
- [11] 吕玺琳, 钱建固, 吕龙, 等. 边坡稳定模糊随机可靠性分析[J]. 岩土力学, 2008, 29(12): 3437—3442.
LÜ Xi-lin, QIAN Jian-gu, LÜ Long, et al. Fuzzy stochastic reliability analysis of slopes[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2008, 29(12): 3437—3442.

- [12] FENG Y, HU L, SHU H. The variance and covariance of fuzzy random variables[J]. **Fuzzy Sets and Systems**, 2001, 120: 487—497.
- [13] 曹文贵, 张永杰. 基于非对称三角模糊数的岩石抗剪强度参数确定方法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(7): 1340—1346.
- CAO Wen-gui, ZHANG Yong-jie. Study on determining method for parameters of rock's shear strength based on asymmetric triangular fuzzy numbers[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2007, 26(7): 1340—1346.
- [14] 蒋中明, 徐卫亚, 张新敏, 等. 弹性介质边坡模糊有限元方法研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(5): 1169—1173.
- JIANG Zhong-ming, XU Wei-ya, ZHANG Xin-min, et al. Study on theory of fuzzy finite element method of elastic media slope[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(5): 1169—1173.
- [15] 肖盛燮, 王平义, 吕恩琳. 模糊数学在土工与水利工程中的应用[M]. 北京: 人民交通出版社, 2004: 42—46.
- [16] 谭晓慧, 王建国, 刘新荣, 等. 边坡稳定的有限元可靠度计算及敏感性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(1): 115—122.
- TAN Xiao-hui, WANG Jian-guo, LIU Xin-rong, et al. Finite element reliability computation and sensitivity analysis of slope stability[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2007, 26(1): 115—122.
- [17] CHAKRABORTY S, SAM P C. Probabilistic safety analysis of structures under hybrid uncertainty[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2007, 70: 405—422.
- [18] 浙江大学数学系高等数学教研组. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985: 244—250.
- [19] 中国建筑科学研究院. GB50007—2002 建筑地基基础设计规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002.
- [20] 谭晓慧, 王建国, 胡晓军, 等. 边坡稳定的模糊随机有限元可靠度分析[J]. 岩土工程学报, 2009, 31(7): 991—996.
- TAN Xiao-hui, WANG Jian-guo, HU Xiao-jun, et al. Fuzzy random finite element reliability analysis of slope stability[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2009, 31(7): 991—996.
- [21] 谭晓慧. 边坡稳定的有限元可靠度分析方法研究[博士学位论文 D]. 合肥: 合肥工业大学, 2007.
- [22] GILL D E, CORTHESEY R, LEITE M L. Determining the minimal number of specimens for laboratory testing of rock properties[J]. **Engineering Geology**, 2005, 78: 29—51.
- [23] 陈祖煜. 土坡稳定分析——原理、方法、程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003: 279—283.